

"The Tippe Top"

La baldufa que s'aixeca

Les equacions

Des del punt de vista físic el seu estudi no és gens senzill, és el moviment d'un sòlid rígid i cal tenir en compte el fregadís de la baldufa amb el terra per obtenir el fenomen d'elevació del seu centre de gravetat. Des dels punt de vista matemàtic, com que les equacions que modelen el seu comportament són força complicades, tampoc és gens fàcil estudiar-les per veure, per exemple, de quina manera intervé el fregadís, la situació del centre de gravetat o la mateixa geometria de la baldufa.

Cal tenir en compte moltes coses per aconseguir modelar aquest problema i que el model s'adeqüi al estrany comportament de la *tippe-top*. La baldufa no gira pràcticament mai sobre un mateix punt tal i com fan les baldufes convencionals, així que es produeix un moviment de rotació amb el terra i aquest moviment produeix diferents forces degut al fregament.

Sempre que un es planteja de resoldre algun problema com el de la baldufa es troba al davant diferents obstacles, i el primer és el coneixement matemàtic. Cal transmetre les idees que un té de tal manera que es puguin tractar i analitzar, i per fer-ho cal conèixer perfectament quines eines matemàtiques existeixen i de quines ens podem servir. Igual d'important és el criteri que un té a l'hora de formalitzar el problema, per exemple en el cas de la *tippe-top* no és gens fàcil pensar quines poden ser les forces que provoca el fregament sobre la baldufa.

Un cop plantejades les equacions, malgrat que algú dirà que tampoc semblen tan complicades, s'ha de dir que en el cas de la baldufa i en tants d'altres no es poden resoldre analíticament, és a dir que no sabem trobar-ne la solució tot i saber que pot existir. Existeixen ben pocs sistemes d'equacions diferencials que siguem capaços de resoldre de manera teòrica, i és per aquest motiu que cal recórrer a altres mètodes matemàtics que a partir de diverses aproximacions aconseguixen solucions tan semblants com es vulgui de la solució teòrica. Aquests mètodes s'anomenen mètodes numèrics i s'utilitzen per exemple per resoldre les equacions de la *tippe-top*.

Per tal de trobar quines són les equacions del moviment d'aquesta divertida joguina, utilitzarem les equacions de *Newton* que ens permeten expressar més

fàcilment els moments produïts per les forces de fregament.

A més, per descriure la posició de la baldufa necessitarem uns quants paràmetres. Utilitzem les coordenades x, y, z per la posició del centre de masses, la baldufa es pot moure en tot el pla i de fet el seu centre de masses també té un petit moviment en la vertical. D'aquesta manera ja tenim controlat el sistema mòbil, ara falta veure com descrivim les rotacions. Això ho farem utilitzant unes coordenades molt conegudes en la física dels sòlids rígids que s'anomenen angles d'*Euler* i denotarem per a, b i c . On a representa un gir respecte l'eix z aconseguint un nou sistema de referència, b representa un gir en l'eix x respecte el nou sistema obtingut i c torna a ser un altre gir respecte l'eix z del sistema obtingut al girar respecte x .

Per un sistema de rotació amb moments externs l'equació de *Newton* pren la següent forma vàlida per qualsevol sistema de referència:

$$R = I\dot{\omega}$$

on $\dot{\omega}$ és la velocitat angular, I el moment de inèrcia (que seria el que ens indica quan li costa girar al cos en cada direcció) i R representa la component i -èssima del moment de la força.

Obtenim les següents equacions:

$$\begin{cases} R_1 = I_{12} \left(\ddot{b} \cos c - \dot{b}\dot{c} \sin c + \ddot{a} \sin c \sin b + \dot{a}\dot{c} \cos c \sin b + \dot{a}\dot{b} \sin c \cos b \right) \\ R_2 = I_{12} \left(-\ddot{b} \cos c - \dot{b}\dot{c} \cos c + \ddot{a} \cos c \sin b - \dot{a}\dot{c} \sin c \sin b + \dot{a}\dot{b} \cos c \cos b \right) \\ R_3 = I_3 \left(\ddot{c} + \ddot{a} \cos b - \dot{a}\dot{b} \sin b \right) \end{cases}$$

Si ara volguéssim veure que passa amb aquests model quan no hi ha cap força externa, sense pes, sols cal igualar les tres components del moment R_1, R_2 i R_3 a 0.

Si per exemple volem posar-hi el pes cal considerar que aquest actua sobre el centre de masses i per tant no interessa en l'estudi d'aquest sistema, en canvi la força normal actua fent un moment, i és aquest el que hem de modelar. Per trobar el moment que fa la força normal sols cal multiplicar vectorialment els vectors força i posició des del punt de contacte de la baldufa amb al terra al centre de masses. El vector obtingut el tindrem escrit en coordenades x, y i z i s'ha d'escriure en el nostre sistema, per tant cal fer un canvi de base. Obtenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{12} \left(\ddot{b} \cos c - \dot{b} \dot{c} \sin c + \ddot{a} \sin c \sin b + \dot{a} \dot{c} \cos c \sin b + \dot{a} \dot{b} \sin c \cos b \right) = \\ = mgd \sin b \cos c \\ I_{12} \left(-\ddot{b} \cos c - \dot{b} \dot{c} \cos c + \ddot{a} \cos c \sin b - \dot{a} \dot{c} \sin c \sin b + \dot{a} \dot{b} \cos c \cos b \right) = \\ = -mgd \sin b \sin c \\ I_3 \left(\ddot{c} + \ddot{a} \cos b - \dot{a} \dot{b} \sin b \right) = 0 \end{array} \right.$$

Finalment el que s'hauria de fer és intentar escriure quins moments provocarien les forces de fregament al nostre sistema, i poder veure així quin seria el seu efecte en el moviment de la baldufa. Un possible model d'aquest problema proposa introduir moments en totes les components, angles *d'Euler*, i s'obté el següent sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{12} \left(\ddot{b} \cos c - \dot{b} \dot{c} \sin c + \ddot{a} \sin c \sin b + \dot{a} \dot{c} \cos c \sin b + \dot{a} \dot{b} \sin c \cos b \right) = \\ = -k_2 \dot{b} \cos c - k_1 \dot{a} \sin c \sin b + mgd \sin b \cos c \\ I_{12} \left(-\ddot{b} \cos c - \dot{b} \dot{c} \cos c + \ddot{a} \cos c \sin b - \dot{a} \dot{c} \sin c \sin b + \dot{a} \dot{b} \cos c \cos b \right) = \\ = -k_2 \dot{b} \sin c - k_1 \dot{a} \cos c \sin b - mgd \sin b \sin c \\ I_3 \left(\ddot{c} + \ddot{a} \cos b - \dot{a} \dot{b} \sin b \right) = -k_1 \dot{a} \cos b - k_3 \dot{c} \end{array} \right.$$

La idea d'aquest model es troba en modelar el fregament considerant que aquest actua sobre les rotacions, és a dir en cada angle *d'Euler*, de manera que els frena proporcionalment a les seves velocitats. Les constants de proporcionalitat són k_1 , k_2 i k_3 .