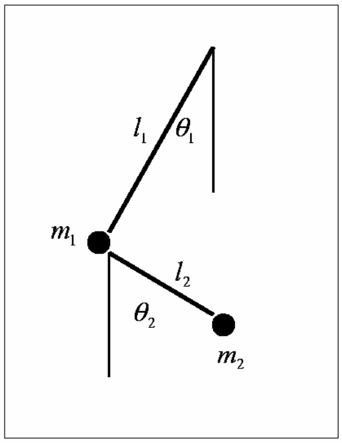
Caos i pèndols



Equacions del moviment

Considerem un pèndol doble amb dues masses m_1 i m_2 i longituds l_1 i l_2, cada una d'elles es separa de la vertical un angle θ_1 i θ_2 (vegeu la figura anterior). Si definim $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ i $\mu = 1 + (m_1 / m_2)$ tenim les equacions diferencials de segon ordre:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \dfrac{g(\sin\theta_2 \cos(\Delta\theta) - \mu \sin\theta_1) - (l_2\dot{\theta}_2^2 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\Delta\theta))\sin(\Delta\theta)}{l_1(\mu - \cos^2(\Delta\theta))} \\ \ddot{\theta}_2 = \dfrac{g(\sin\theta_1 \cos(\Delta\theta) - \sin\theta_2)\mu + (\mu l_1\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos(\Delta\theta))\sin(\Delta\theta)}{l_2(\mu - \cos^2(\Delta\theta))} \end{cases}$$

Per a oscil·lacions petites, podem fer les aproximacions següents:

$$\sin\theta_i = \theta_i, \qquad \sin(\Delta\theta) = 0, \qquad \cos(\Delta\theta) = 1$$

i aleshores les equacions diferencials anteriors queden de la forma:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \dfrac{g(\theta_2 - \mu\theta_1)}{l_1(\mu - 1)} \\ \ddot{\theta}_2 = \dfrac{g\mu(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(\mu - 1)} \end{cases}$$

Aquestes noves equacions són les de dos oscil·ladors lineals acoblats, estudiades en diversos llibres de sistemes dinàmics. Al ser unes equacions lineals produeixen moviments perfectament regulars i, per tant no hi ha cap tipus de comportament caòtic.

Les equacions diferencials tenen quatre punts d'equilibri:

$$(\theta_1 = 0,\ \theta_2 = 0),\ \ (\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi),\ \ (\theta_1 = \pi,\ \theta_2 = 0),\ \ (\theta_1 = \pi,\ \theta_2 = \pi),$$

és a dir punts on si el pèndol està en la posició d'equilibri no es mou, naturalment aquests punts o posicions d'equilibri poden ser estables o inestables. Excepte el (0,0), que és un centre rodejat de solucions periòdiques, tots els demés són inestables.

El comportament caòtic

Una primera mesura el caos o la sensibilitat a les condicions inicials d'una solució s'utilitza l'exponent de Lyapunov. La idea bàsica d'aquest mètode consisteix en que si comencem amb dues condicions inicials a una distància petita, aquesta distància variarà de forma exponencial durant el pas del temps, l'exponent d'aquesta funció exponencial és l'anomenat exponent de Lyapunov. Si l'exponent és negatiu la distància tendirà ràpidament cap a zero, és a dir, tindrem que les dues solucions s'acosten cada vegada més, en canvi, si l'exponent és positiu la distància inicial s'anirà fent cada vegada més gran i les dues solucions seran cada vegada més diferents, és a dir, que petites diferències en les condicions inicials donaran solucions que seran cada cop més i més diferents.

En aquest problema es pot calcular l'exponent de Lyapunov per a diversos valors dels angles i per a valors grans, majors de 3 radians, s'obtenen exponents de Lyapunov de l'ordre de 0.7. Aquests resultats es poden comparar amb altres comportaments caòtics, per exemple la funció logística té exponents de Lyapunov de l'ordre de 0.5, les equacions de Lorenz tenen exponents de fins a 2.16.

Referències bibliogràfiques

V. Arnold. *Équations différentielles ordinaires*. Mir, 1974.

L. Landau; E. Lifshitz. *Curso abreviado de Física Teórica. Libro 1. Mecánica y electrodinámica*. Mir, 1971.

O. Plaat**.** *Ecuaciones diferenciales ordinárias*. Reverté, 1974.

T. Shinbrot; C. Grebogi; J. A. Yorke. *Chaos in a double pendulum*. Am. J. Phys. **60**(6), June 1992.