Com aguantar l'escombra?

El pèndol invertit

Les equacions del moviment

Prenem un pèndol de llargada l i de massa m, considerant que la vareta té una massa negligible i és rígida i que tota la massa està concentrada puntualment a l'extrem del pèndol. El pèndol sols se li permet el moviment en el pla xy, i sobre un suport de massa M que es desplaça al llarg de l'eix x. La força que es vol aplicar per controlar l'estabilitat del sistema es farà sobre el suport i sols tindrà la direcció de l'eix x, les forces de fregament amb el terra tenen aquesta mateixa direcció, així que no ens preopupem de modelitzar-les sinó que les suposem incloses dins la força que nosaltres volem aplicar, que alhora també dependrà, al igual que la força de fregament, de la velocitat.

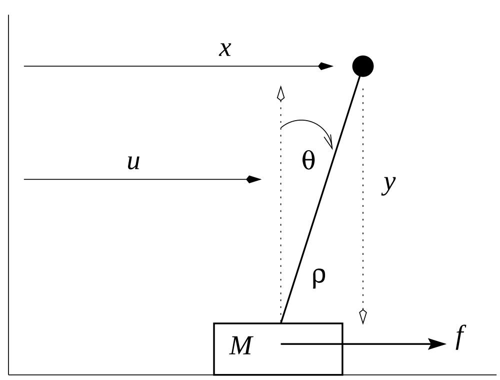

Figura 1: Esquema del pèndol invertit

Sembla que una bona manera de representar el moviment d'aquest sistema serà coneixent les coordenades u que ens indica el desplaçament del suport i θ que descriu l'angle que forma la vareta del pèndol amb la vertical. D'aquesta manera la variació de u ens indicarà la velocitat amb que es mou el suport i la variació de la velocitat angular de la massa m. La posició de la massa M és $x = u$, $y = 0$ i la de la massa m és $x = u + l\cos\theta$ $y = l\sin\theta$

Per escriure les equacions del moviment utilitzarem formulació lagrangiana i per tant necessitem conèixer les expressions dels observables energia cinètica T i potencial V. L'energia cinètica està formada per les contribucions de les velocitats de les dues masses m i M en canvi en l'energia potencial sols hi contribueix la massa m.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)) + \frac{1}{2}M\dot{u}^2 = \frac{1}{2}(m+M)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{u}\dot{\theta}ml\cos\theta$$

$$V = mgy = mgl\cos\theta$$

On g és l'acceleració de la gravetat

La funció de Lagrange és $L = T - V$ i l'única força exterior és $f_u = f$ que sols s'aplica a M i que en coordenades u i θ val $(f, 0)$. Podem escriure ara les equacions de Lagrange pel nostre problema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{u}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial u} = f \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} l\ddot{\theta} + \ddot{u}\cos\theta - g\sin\theta = 0 \\ (M+m)\ddot{u} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = f \end{array}\right\}$$

I ara posant $\mu = m/(m+M)$, aïllant l'acceleració angular de la massa m i l'acceleració del suport M i fent el següent canvi de variable, $t = \tau\sqrt{l/g}$, $\bar{u} = u/l$, $\bar{f} = \frac{f/g}{m+M}$ i denotem per primes les derivades respecte τ,

$$\left\{\begin{array}{l} \theta'' = \dfrac{\sin\theta - \cos\theta\left(\bar{f} + \mu\theta'^2\sin\theta\right)}{l(1-\mu\cos^2\theta)} \\ \bar{u} = \bar{f} + \mu\left(\theta'^2\sin\theta - \theta''\cos\theta\right) \end{array}\right.$$

on totes les variables són adimensionals.

El control

El nostre objectiu és controlar que l'escombra no caigui. I ho volem fer de manera que al aplicar una força al suport aconseguim que el punt d'equilibri, és a dir $\theta = 0$ l'escombra completament vertical, es converteixi en un punt d'equilibri estable.

Si $f = 0$ és clar que l'únic punt d'equilibri és quan l'escombra es troba vertical, però aquest punt és completament inestable, una lleugera oscil·lació ens farà caure l'escombra irremeiablement a no ser que apliquem una força al suport provocant així un moment sobre l'escombra que la retornaria al seu equilibri altre cop.

La funció f de la que parlem és una funció desconeguda que depèn de les posicions del suport, de la massa m i de les seves velocitats, i pot ésser ben complicada. Per exemple nosaltres sabem que com més gran sigui θ més gran haurà de ser la força f i passa el mateix amb la velocitat angular de la massa m, la dependència de la posició del suport sembla no importar massa però si la seva velocitat. Així és que la desenvoluparem linealment en un entorn del punt d'equilibri p ($\theta = \omega = u = v = 0$).

$$f(\theta, \omega, u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} f\right)_p \theta + \left(\frac{\partial}{\partial\omega} f\right)_p \omega + \left(\frac{\partial}{\partial u} f\right)_p u + \left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)_p v + O_2$$

I la podem escriure doncs en funció dels paràmetres a, b, c i d que són els paràmetres de control del sistema.

$$f(\theta, \omega, u, v) = a\theta + b\omega + cu + dv$$

Un cop feta aquesta aproximació cal donar valors als paràmetres i veure si aconseguim el que volem. Com assignem valors al paràmetres de f? Doncs tenim diverses opcions, el que es fa primer és considerar els casos més senzills fent que alguns paràmetres valguin 0 i estudiant així les equacions que hem trobat anteriorment i que recordem depenien de f. Una altra opció és estudiar directament les equacions i, a través d'alguns criteris, obtenir condicions per als paràmetres.

Un cop trobats alguns valors pels paràmetres de manera que facin que el punt vertical esdevingui un punt d'equilibri estable, cal simular el sistema i veure per quins punts inicials del sistema aquest evoluciona cap al punt d'equilibri, doncs els criteris utilitzats per assignar valors als paràmetres tenen en molts casos una validesa local. També és interessant fer altres aproximacions de f com pot ser una aproximació quadràtica, i estudiar altre cop la possible creació de nous punts d'estabilitat i veure com varien les conques d'atracció.