El problema dels tres cossos

Una mica d'història

L'estudi del moviment dels planetes i satèl·lits ha estat des de fa molts segles un dels temes més importants de la ciència, i avui en dia encara ho segueix sent. Com és sabut, l'astronomia occidental començà amb els grecs, qui a la vegada, s'inspiraren en els egipcis. $Thales$ $(640-546$ aC) va anar a aprendre a Egipte, on ja es coneixia l'esfericitat de la Terra, l'obliqüitat de l'eclíptica i segons es deia eren capaços de predir eclipsis solars. *Pitàgoras* $(569-470$ aC) fou el primer que afirmà que el planeta matutí i el vespertí són el mateix $Venus$. També és conegut el model geocèntric de *Ptolomeo* $(100-170aC)$ amb tot el muntatge d'epicicles per explicar el moviment aparent dels planetes. Però *Aristarc* de *Samos* $(310-230$ aC) ja havia proposat molt abans el model heliocèntric, afirmació que va provocar que l'acusessin d'heretge (la història es repetiria dinou segles més tard amb *Galileu*).

Després de *Ptolomeo* l'astronomia i la ciència en general varen restar força aturades excepte en el mon àrab. Els àrabs, a més de recollir i conservar els coneixements científis de Grècia, Mesopotàmia i de la Índia, els milloraren en molts aspectes. Per exemple al-$Ma'mun$ $(786-833$ aC) i al-$Biruni$ $(973-1048)$ mesuraren amb força exactitud el radi de la Terra. No fou fins al segle XV que l'astronomia es revifà a Europa gràcies als lectors dels textos àrabs. La numeració àrab, per exemple, entrà a Europa per Espanya i Sicília.

En aquest segon període cal remarcar *Copèrnic* (1473-1543) amb el model heliocèntric del sistema solar. Posteriorment, $Tycho\ Brahe$ (1546-1601) va continuar la teoria de Copèrnic i fou un deixeble seu, *Kepler* (1571-1630) qui va enunciar les lleis del moviment planetari, preludi de la llei de la gravitació de $Newton$ (1642-1727). Un altre gran defensor de la teoria heliocèntrica fou *Galileu* (1564-1642) que li va costar algun ensurt. Una vegada acceptada la teoria heliocèntrica i les lleis de $Kepler$ i $Newton$, els científics es centraren més en el moviment específic de cada un dels planetes i les influències entre ells.

El moviment de la Lluna fou estudiat per *Clairut* i $D'Alembert$ (1747) emprant desenvolupaments en sèrie. *Euler* va guanyar dos premis de l'Acadèmia Francesa (1748-1752) amb estudis sobre les pertorbacions de Júpiter i Saturn, *Lagrange* (1766) i *Laplace* (1784) també estudiaren el mateix tema. Un dels estudis més complets sobre el moviment de la Lluna fou realitzat per *Delaunay* (1860-1876). De totes maneres no es pot oblidar una de les grans obres de la mecànica celest: *"Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste"* (1892) de *Henri Poincaré*, tres extensos volums que marcaren una fita. Plutó, el novè planeta, fou descobert per *C. Tombaugh* a l'any 1930 gràcies a les prediccions fetes anys abans per *P. Lowell* basant-se en les pertorbacions de l'òrbita de Neptú i d'Urà.

Les equacions

Per tal de expressar les equacions del moviment farem que la suma de les dues masses sigui 1 $m_1 + m_2 = 1$ fent $m_1 = \mu$ i $m_2 = 1 - \mu$ i les situem en un sistema de coordenades en les posicions $(1 - \mu, 0)$ per m_1 i $(-\mu, 0)$ per m_2 com veiem en la figura. D'aquesta forma el centre de masses serà l'origen de coordenades. I tot aquest sistema de coordenades es mourà solidàriament amb les dues masses m_1 i m_2.

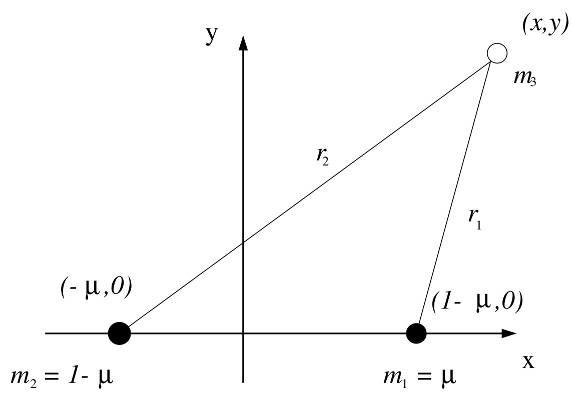

Figura 1: Els tres cossos en el pla

Així doncs, el moviment del tercer cos, de massa infinitesimal, ve donat en (ξ, η), per les equacions diferencials següents:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} = \dfrac{\mu}{r_1^3}(\xi - \xi_1) + \dfrac{1-\mu}{r_2^3}(\xi - \xi_2) \\ \ddot{\eta} = \dfrac{\mu}{r_1^3}(\eta - \eta_1) + \dfrac{1-\mu}{r_2^3}(\eta - \eta_2) \end{array} \right.$$

on G la constant graviotatòria val 1. I ara amb les relacions descrites anteriorment per m_1 i m_2 i per les seves posicions (ξ_1, ξ_2) i (η_1, η_2), obtenim les següents equacions en el sistema (x, y):

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \end{array} \right.$$

on,

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\mu r_1^2 + (1-\mu) r_2^2\right) + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2}$$
$$r_1^2 = (x-(1-\mu))^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (x+\mu)^2 + y^2$$

i Ω_x i Ω_y són les derivades parcials de Ω respecta les coordenades x i y respectivament.

El problema de tres cossos, té cinc punts d'equilibri, resultat de resoldre les equacions,

$$\begin{cases} \Omega_x = 0 \\ \Omega_y = 0 \end{cases}$$

i s'anomenen, L_1, L_2, L_3 o *d'Euler*, i L_4, L_5 o de *Lagrange*. Situats segons es pot veure a la figura.

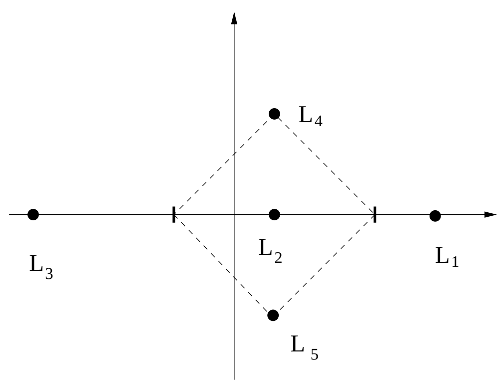

Figura 2: Els tres cossos en el pla

Alguns d'ells poden sorprendre que siguin punts d'equilibri, però heu de pensar que en realitat els eixos estan girant i, per tant, aquests punts d'equilibri es mouen solidàriament amb els eixos i les dues masses principals. Però el que és important és que el tercer cos roman en la mateixa posició respecte els dos primaris. Alguns d'aquests punts són molt interessants des del punt de vista pràctic, doncs resulta que al estudiar les equacions ens adonem que existeixen òrbites periòdiques al seu voltant, és a dir que donades certes condicions inicials, s'aconsegueix que el tercer cos descrigui una trajectòria periòdica a la vora d'algun dels punts d'equilibri. De fet *Poincré* demostrà que hi ha moltes condicions inicials que provoquen aquests tipus de moviments.

Per exemple, la *ESA* ha col·locat un satèl·lit d'observació del Sol, el *Soho*, en una òrbita periòdica estable al voltant de L1 del sistema Sol Terra. Hi ha un projecte per posar-ne un altre al voltant del punt L2, que està a l'ombra de la Terra per fer observacions infraroges i s'ha proposat instal·lar una estació fixa al voltant de L1 del sistema Terra Lluna.